加重平均処理についての考察

直近のカウント率（C_n）と前回のカウント率表示値（D_{n-1}）を 1 :α のウェイトで加重平均する。これを多数回繰り返すと、

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{1}{1+\alpha}C_n + \frac{\alpha}{1+\alpha}D_{n-1} \\
&= \frac{1}{1+\alpha}C_n + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha}C_{n-1} + \frac{\alpha}{1+\alpha}D_{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{1+\alpha}C_n + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha}C_{n-1} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{1+\alpha}C_{n-2} + \frac{\alpha}{1+\alpha}D_{n-3}\right)\right) \\
&= \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\
&= \frac{1}{1+\alpha}\left[C_n + \frac{\alpha}{1+\alpha}C_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 C_{n-2} + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^3 C_{n-3} + \bullet\bullet\bullet + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^k C_{n-k} + \bullet\bullet\bullet\right]
\end{aligned}
$$

となる。

たとえば α=5 の場合

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{1}{6}\left(C_n + \frac{5}{6}C_{n-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 C_{n-2} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 C_{n-3} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 C_{n-4} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 C_{n-5} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 C_{n-6} + \bullet\bullet\bullet\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(C_n + 0.833\,C_{n-1} + 0.694\,C_{n-2} + 0.579\,C_{n-3} + 0.482\,C_{n-4} + 0.402\,C_{n-5} + 0.335\,C_{n-6} + \bullet\bullet\bullet\right)
\end{aligned}
$$

10 秒間隔でサンプリングしているとすると、1 分前のカウント率 C_{n-6} は 0.335（～ e^{-1}）に減衰していることがわかる。

一方、時定数が τ の積分回路を通す場合、取り込んだ信号強度は t 秒後に $e^{-\frac{t}{\tau}}$ で減衰する。信号は連続量なので信号にウェイト $e^{-\frac{t}{\tau}}$ をかけて積分する必要があるが、比較しやすいように離散的なサンプリングとする。10 秒間隔でサンプリングなので t=10(n-k)に置き換える 。

10*k 秒前の信号（C_{n-k}）にかかるウェイトは $e^{-\frac{10(n-k)}{\tau}} = \left(e^{-\frac{10}{\tau}}\right)^{n-k}$ であり、

$$
D_n = C_n + e^{-\frac{10}{\tau}}C_{n-1} + \left(e^{-\frac{10}{\tau}}\right)^2 C_{n-2} + \left(e^{-\frac{10}{\tau}}\right)^3 C_{n-3} + \left(e^{-\frac{10}{\tau}}\right)^4 C_{n-4} + \left(e^{-\frac{10}{\tau}}\right)^5 C_{n-5} + \left(e^{-\frac{10}{\tau}}\right)^6 C_{n-6} + \bullet\bullet\bullet
$$

と表すことができる。

1 :α の加重平均操作と時定数が τ の積分回路を通す計算式を比較すると

$\frac{\alpha}{1+\alpha}$ が $e^{-\frac{10}{\tau}}$ に対応する。

α=5 とすると $\frac{5}{6}=e^{-\frac{10}{\tau}}$ で τ=55、すなわち時定数は約 1 分であることがわかる。