

給電ループ方式 Small Loop Antenna のインピーダンス計算 Impedance Calculation of Small Loop Antenna with Coupling Loop

最近、アンテナの複素インピーダンス ($R+iX$) を簡単に測定できる低価格のアンテナアナライザが普及している。 $R+iX$ の周波数特性から、アンテナのインピーダンス整合をとるための見通しを得ることができる。ここでは給電ループ方式の Small Loop Antenna (SLA) を対象にインピーダンス解析を試みる。

1. 給電ループ方式 SLA

メインループ径の $1/3 \sim 1/5$ 程度の小さなワンターンコイル (給電ループ) を使ってメインループに給電する方式 (Fig. 1) がアマチュア無線用 SLA ではよく使われている。給電ループの大きさ、メインループとの間隔、ループ面の角度などを調整することで給電ループのインダクタンスやメインループとの結合係数を自在に変えることができ、特にマルチバンド SLA の給電方式として自由度が高く便利な手法である。

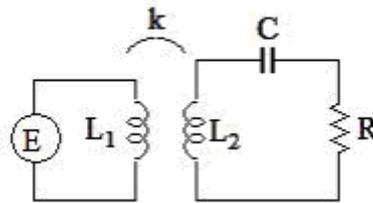
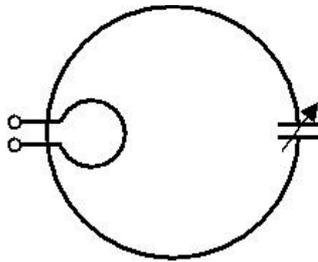


Fig.1. SLA with a coupling loop Fig.2. Circuit model for SLA with a coupling loop

給電ループ方式の SLA は Fig.2 の回路であらわされる。磁気結合した給電ループとメインループはトランスとして表現される。ここで、 L_1 は給電ループのインダクタンス、 L_2 はメインループのインダクタンス、 k はメインループと給電ループの結合係数、 C は同調容量、 R は全抵抗 (損失抵抗と放射抵抗の和) である。

2. 給電インピーダンスの計算

Fig.2 の回路はよく知られた相互誘導の等価回路 (Fig.3) に置き換えることができる。

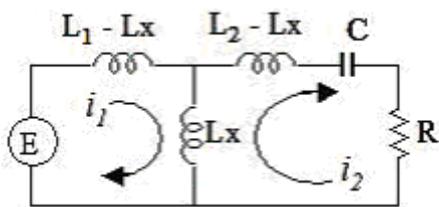


Fig.3. The equivalent circuit to the SLA model

ここで、 L_X は相互インダクタンスであり、 $L_X = k\sqrt{L_1 L_2}$ で定義される。

Fig.3において、電圧 E を加えたときに左側のループに流れる電流を I_1 、右側のループに流れる電流を I_2 とすると、（角周波数を ω として）

$$\begin{aligned} E &= i\omega(L_1 - L_X)I_1 + i\omega L_X(I_1 - I_2) \\ &= i\omega L_1 I_1 - i\omega L_X I_2 \end{aligned} \quad \text{---(1)}$$

$$\begin{aligned} 0 &= i\omega L_X(I_2 - I_1) + i\omega(L_2 - L_X)I_2 + R I_2 - i\frac{1}{\omega C}I_2 \\ &= R I_2 + i\omega L_2 I_2 - i\omega L_X I_1 - i\frac{1}{\omega C}I_2 \end{aligned} \quad \text{---(2)}$$

となる。さらに(2)式を変形すると

$$\begin{aligned} \left(R + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right) \right) I_2 &= i\omega L_X I_1 \\ I_2 &= \frac{i\omega L_X}{R + i\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)} I_1 = \frac{i\omega^2 L_X C}{\omega C R + i(\omega^2 L_2 C - 1)} I_1 \end{aligned} \quad \text{---(2')}$$

となる。これを(1)式に代入して

$$\begin{aligned} E &= i\omega L_1 I_1 - i\omega L_X \frac{i\omega^2 L_X C}{\omega C R + i(\omega^2 L_2 C - 1)} I_1 \\ &= i\omega L_1 I_1 + \frac{\omega^3 L_X^2 C}{\omega C R + i(\omega^2 L_2 C - 1)} I_1 \end{aligned} \quad \text{---(3)}$$

が得られる。

給電インピーダンスは $Z \equiv \frac{E}{I_1}$ であるので、

$$\begin{aligned} Z &\equiv \frac{E}{I_1} = i\omega L_1 + \frac{\omega^3 L_X^2 C}{\omega C R + i(\omega^2 L_2 C - 1)} \\ &= i\omega L_1 + \frac{\omega^3 L_X^2 C (\omega C R - i(\omega^2 L_2 C - 1))}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \\ &= i\omega L_1 + \frac{\omega^4 L_X^2 C^2 R - i(\omega^2 L_2 C - 1)\omega^3 L_X^2 C}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \\ &= \frac{\omega^4 L_X^2 C^2 R}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} + i\omega L_1 - i \frac{(\omega^2 L_2 C - 1)\omega^3 L_X^2 C}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \\ &= \frac{\omega^4 L_X^2 C^2 R}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} + i \left\{ \omega L_1 + \frac{(1 - \omega^2 L_2 C)\omega^3 L_X^2 C}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \right\} \\ &= \frac{(\omega L_X)^2 (\omega C)^2 R}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} + i \left\{ \omega L_1 + \frac{(1 - \omega^2 L_2 C)(\omega L_X)^2 \omega C}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \right\} \end{aligned} \quad \text{---(4)}$$

となる。給電インピーダンスの実部と虚部を分けて書けば

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{(\omega L_x)^2 (\omega C)^2 R}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \quad \text{---(5-1)}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \omega L_1 + \frac{(1 - \omega^2 L_2 C) (\omega L_x)^2 \omega C}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \quad \text{---(5-2)}$$

となる。これらに $L_x = k\sqrt{L_1 L_2}$ を代入すると

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{\omega^4 C^2 R k^2 L_1 L_2}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \quad \text{---(6-1)}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \omega L_1 + \frac{(1 - \omega^2 L_2 C) \omega^3 C k^2 L_1 L_2}{(\omega C R)^2 + (\omega^2 L_2 C - 1)^2} \quad \text{---(6-2)}$$

が得られる。

$\operatorname{Re}(Z)$ の形をみてみると、 L_2 と C がつくる共振周波数 ω_0 ($\omega_0^2 L_2 C - 1 = 0$) を中心に ω をわずかに変化させたとき分母の第2項 $(\omega^2 L_2 C - 1)^2$ のみが大きく変化する。分子と分母の第1項は単調な関数なので変化は小さい。 $\omega = \omega_0$ で分母は最小 ($= (\omega C R)^2$) となるから $\operatorname{Re}(Z)$ は $\omega = \omega_0$ にピークをもつことになる。ピークの最大値は $\frac{k^2 \omega_0^2 L_1 L_2}{R}$ である。

つぎに、この共振ピークの半値幅を求めてみよう。 $\operatorname{Re}(Z)$ が最大値の半分となる角周波数をそれぞれ ω_1 、 ω_2 とする。(6-1)式の分母がその最小値の2倍となると $\operatorname{Re}(Z)$ は近似的に最大値の半分になるので、 ω_1 、 ω_2 は $(\omega^2 L_2 C - 1)^2 = (\omega C R)^2$ なる条件を満たすことにな

る。この式は $\omega^2 L_2 C - 1 = \pm \omega C R$ と書き換えられ、 $\omega_1 < \omega_2$ とすれば

$$\omega_1^2 L_2 C - 1 = -\omega_1 C R \quad \text{---(7-1)}$$

$$\omega_2^2 L_2 C - 1 = +\omega_2 C R \quad \text{---(7-2)}$$

である。(7-1)式と(7-2)式の差をとると

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) L_2 C = (\omega_2 + \omega_1) C R$$

$$(\omega_2 - \omega_1) L_2 C = C R$$

$$\therefore \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L_2} \quad \text{---(8)}$$

つまり $\text{Re}(Z)$ のピークの半値幅が $\frac{R}{L_2}$ に相当することがわかる。 $\omega_0^2 L_2 C - 1 = 0$ の関係があるから $\frac{R}{L_2} = \omega_0^2 C R$ と書ける。これらを図示すると Fig.4 のようになる。

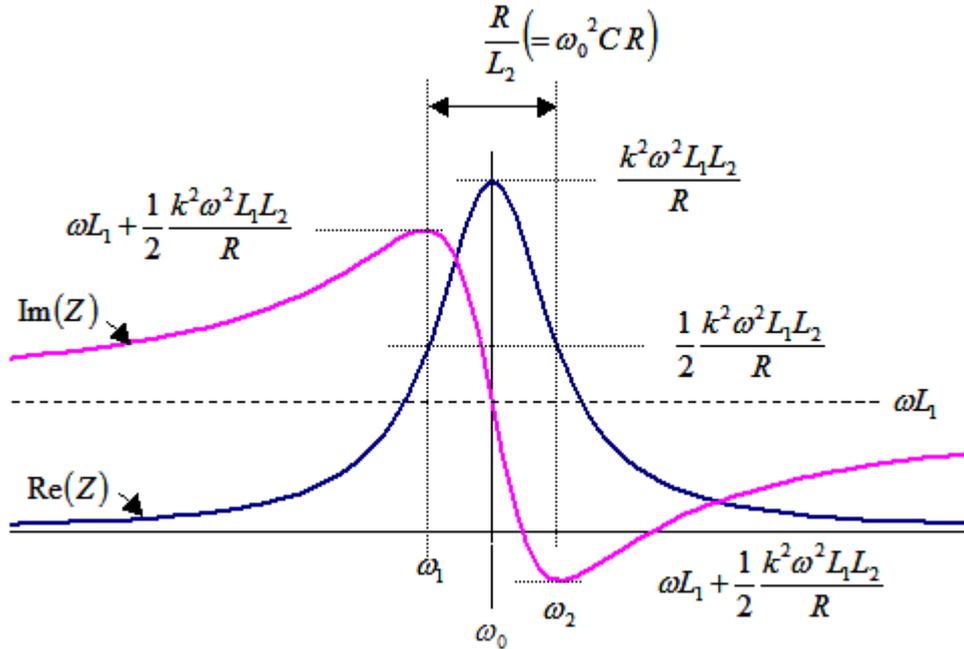


Fig.4. Impedance curves $\text{Re}(Z)$ and $\text{Im}(Z)$ around the resonance frequency ω_0

ところでメインループからなる共振回路の Q 値は下式で定義される。

$$Q \equiv \frac{\omega_0 L_2}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad , \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{-3dB}} \quad \text{---(9)}$$

これを(8)式に適用すれば

$$\frac{R}{L_2} = \omega_0 \frac{1}{Q} = \omega_0 \frac{\Delta\omega_{-3dB}}{\omega_0} = \Delta\omega_{-3dB}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega_{-3dB} \quad \text{---(10)}$$

となって、 $\text{Re}(Z)$ にあらわれる共振ピークの半値幅はこの共振回路のバンド幅に相当することがわかる。SLA の輻射効率は Q の大小に強く依存するので実際の Q 値を把握することは重要である。これまでの計算で示したように、給電インピーダンス ($\text{Re}(Z)$) の共振ピーク

を測定すればアンテナの Q 値を求めることができるので設計通りの特性が得られているかどうかをチェックできる。

一方、 $\text{Im}(Z)$ (リアクタンス・カーブ) からどんな情報が得られるのか。 $\text{Im}(Z)$ の値は共振周波数から外れたところでは給電ループのインダクタンスに相当するリアクタンス： ωL_1 に近い値をとるが、共振周波数の近傍では $\omega L_1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \omega^2 L_1 L_2}{R}$ から $\omega L_1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \omega^2 L_1 L_2}{R}$ まで大きく変化する。その振れ幅は $\text{Re}(Z)$ の最大値に等しい。ここでも(9)式の関係を用い、より見通しの良い形に書き換えてみる。

$$\omega L_1 \pm \frac{1}{2} \frac{k^2 \omega^2 L_1 L_2}{R} \cong \omega L_1 \pm \frac{k^2}{2} \frac{\omega_0 L_2}{R} \omega L_1 = \omega L_1 \left(1 \pm \frac{k^2 Q}{2} \right) \quad \dots(11)$$

たとえば極端な例として給電ループの径が小さすぎて十分な大きさの k (結合係数) が得られないと $1 - \frac{k^2 Q}{2} > 0$ となって $\text{Im}(Z) = 0$ の条件が得られない (インピーダンスマッチングがとれない) ということがおこる。また、給電ループの径が大きすぎる場合は、たとえ $1 - \frac{k^2 Q}{2} = 0$ の条件を満たすとしても同時に $\text{Re}(Z)$ が大きくなり過ぎてやはりインピーダンスマッチングが取れなくなってしまう。結局、 $\text{Im}(Z) = 0$ で $\text{Re}(Z) = 50\Omega$ となる L_1 、 k を探し出すことが必要となる。さらに、モノバンドでこの条件を実現できたとしてもマルチバンド化したときにどのバンドでも最適条件が得られるとは限らず、あらためて妥協可能な L_1 と k の組み合わせを決める必要がでてくる。適切な給電ループの大きさはメインループ径の 1/5 程度とされている。

Fig.2 もしくは Fig.3 に戻って全抵抗(R)の中身を明確にしておこう。 R は全ての損失抵抗(R_L)と放射抵抗(R_R)の和である。上記の計算で $R = R_0 = (R_L + R_R)$ とおけば無負荷時の特性 ($Q_0 = \omega L_2 / (R_L + R_R)$) が得られる。しかし実際はアンテナに入出力インピーダンスが R_{EXT} (通常、 50Ω) の RF 機器をつないで使用するので全抵抗に R_{EXT} を加える必要がある。整合がとれた状態では $R_0 = R_{EXT}$ なので結局、 $R = R_0 + R_{EXT} = 2 * R_0 = 2 * (R_L + R_R)$ と置き換えれば、負荷インピーダンスをとり込んだ特性 ($Q_L = \omega L_2 / 2(R_L + R_R)$) が得られる。

3. まとめ

アンテナ特性の把握には複素インピーダンス測定が有用である。特に SLA の場合、

- ・ $\text{Re}(Z)$ の共振ピークの半値幅からアンテナの Q 値を読み取れる、
 - ・ $\text{Re}(Z)$ の共振ピークの最大値もしくは $\text{Im}(Z)$ の共振点近傍での振れ幅からメインループと給電ループの結合係数 k を評価できる、
- など、アンテナの設計・保守に役立つデータを簡便に取得できる。