● 差分法の基礎

１．差分法の考え方

FDM ： Finite Difference Method

$$\frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{\delta u}{\delta x} \quad (\delta x : 小)$$

（微分）　　　（差分商）

微分操作の差分近似（u(x)の場合）

Taylorの展開式

$$\begin{cases} u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x \cdot u'(x) + \dfrac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \dfrac{\Delta x^3}{6} u'''(x) + \Lambda & (1) \\ u(x-\Delta x) = u(x) - \Delta x \cdot u'(x) + \dfrac{\Delta x^2}{2} u''(x) - \dfrac{\Delta x^3}{6} u'''(x) + \Lambda & (2) \end{cases}$$

式(1)　＋　式(2)

$$u(x+\Delta x) + u(x-\Delta x) = 2u(x) + \Delta x^2 \cdot u''(x) + \overline{O}(\Delta x^4) \qquad (3)$$

$\overline{O}(\Delta x^4)$: Δx の4次以上を含む項

⟶ 無視すると

$$u''(x) = \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\{u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)\} \qquad (4)$$

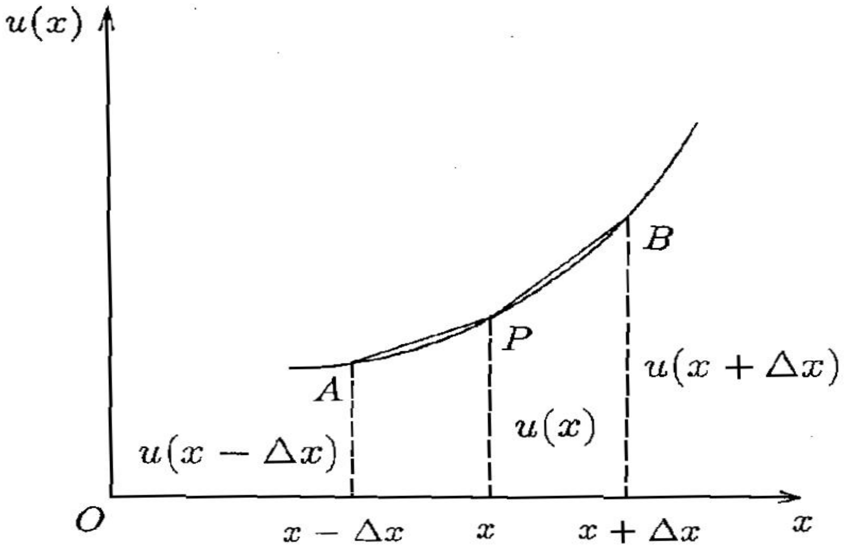
Error ⟶ Δx^2 の程度

式（１）－ 式（２）　$\overline{O}(\Delta x^3)$を無視、

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} \cong \frac{u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \qquad (5)$$

（中心差分近似）

$$Error \rightarrow \overline{O}(\Delta x^2)$$



$$u'(x)=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \qquad (6)$$

（前進差分近似）

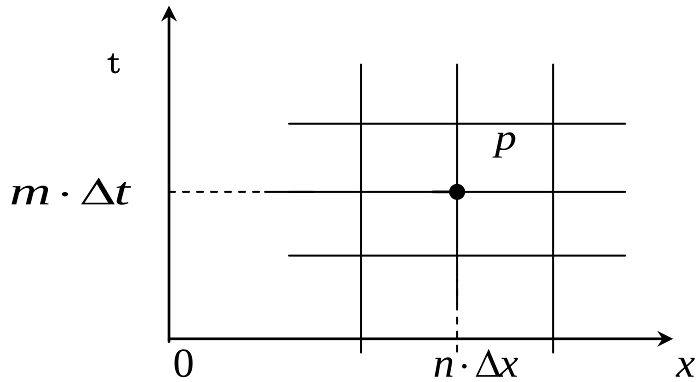
$$u'(x)=\frac{u(x)-u(x-\Delta x)}{\Delta x} \qquad (7)$$

（後退差分近似）

$$Error \rightarrow \overline{O}(\Delta x)$$

２． u(x,t)の場合

$$x=n\cdot\Delta x \qquad t=m\cdot\Delta t$$



$$u_p=u(n\cdot\Delta x,\quad m\cdot\Delta t)=u_n^m$$

式(4)から

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_n^m \simeq \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\Delta x)^2} \qquad \overline{O}(\Delta x^2) \qquad (8)$$

同様に

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}\right)_n^m \simeq \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{(\Delta t)^2} \qquad \overline{O}(\Delta t^2) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta t} \qquad \overline{O}(\Delta t) \qquad (10)$$

（前進差分近似）