３．三角形１次要素での定式化

３．１　形状関数の決定

それでは次に具体的なマトリクスとベクトルの内容を導入していきましょう。

ここでは例として形状関数N_iが三角形１次要素である場合を考えます。いま図１で考えますと、式（３）では$n_e=3$となり任意の点Ｐでのθは次式により表されます。

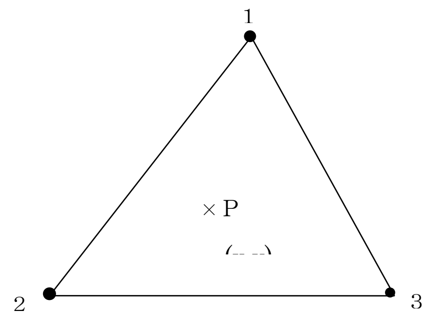

図１　三角形一次要素の場合

したがって、たとえば点Ｐが節点“１”に移動した場合には定義からθがθ_1になること等から以下の関係式が成り立ちます。

$$\theta_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{3} N_i \theta_i \qquad (18)$$

$$\begin{aligned}
&(x_1,\ y_1)\ \text{で}\ N_1=1,\ N_2=0,\ N_3=0\\
&(x_2,\ y_2)\ \text{で}\ N_1=0,\ N_2=1,\ N_3=0\\
&(x_3,\ y_3)\ \text{で}\ N_1=0,\ N_2=0,\ N_3=1
\end{aligned} \qquad (19)$$

ここでx_i，y_iは、節点（ｉ）の各座標の値を示しています。
いっぽうN_iは、ｘ，ｙの１次関数であることから、次式で表されます。

$$N_i(x,\ y) = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i \qquad (i=1\sim3) \qquad (20)$$

すなわち式（２０）での未知定数は、α、β、γの３種類×３個（ｉ＝１～３）で、合計９個となります。

いっぽう式（１９）の関係式における個数も９個ですので、結局α_i、β_i、γ_i（ｉ＝１～３）の未知定数が決定され、式（２０）より、N_iは結局次式で表されます。

$$N_i = \frac{1}{2\Delta}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \qquad （２１）$$

ここで、

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad （２２）_1$$

（ △：図２．６の三角形１次要素の面積 ）

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \,,\, b_i = y_j - y_k \,,\; c_i = x_k - x_j \qquad （２２）_2$$

となります。

３．２　面積座標と形状関数との関係

面積座標Ｌ１～Ｌ３は、図３．７において式（２３）のように定義されます。

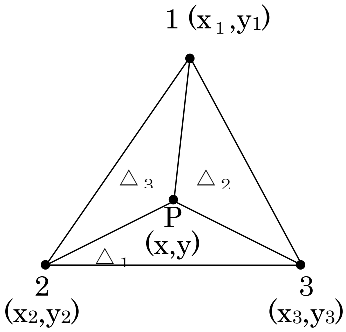

図２．７　面積座標

$$L_1 = \triangle_1 / \triangle, \quad L_2 = \triangle_2 / \triangle, \quad L_3 = \triangle_3 / \triangle \qquad （２３）$$

ここで、$\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 = \triangle$ であることから結局次式が成り立ちます。

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \qquad （２４）$$

いっぽう、たとえば図２．７での面積$\triangle_1$は次式で表されます。

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(a_1 + b_1 x + c_1 y\right)$$

ただし、$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$,　$b_1 = y_2 - y_3$,　$c_1 = x_3 - x_2$　です。

同様に$\triangle_2$，$\triangle_3$も表せますので、結局、一般的な関係式として次式が成り立ちます。

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \quad (i = 1 \sim 3) \tag{25}$$

ここで　$a_i = x_j y_k - x_k y_j$,　$b_i = y_j - y_k$,　$c_i = x_k - x_j$　です。

したがって式（２１）と式(２５)より、三角形１次要素の場合には$N_i = L_i$という関係のあることがわかります。

いっぽう、式（２３）のような面積座標の積分には公式として次式が与えられています。(注)

$$\int_{V^e} L_1^{\lambda} L_2^{m} L_3^{n} dx \cdot dy = \frac{\lambda! m! n!}{(\lambda + m + n + 2)!} \cdot 2\Delta \tag{26}$$

ここで、λ，m，nは非負の整数です。

（注）Eisenberg, M.A. and Malvern, L.E., Int. J. Numer. Meth. Engng.(1974),574.

３．３　各マトリックスとベクトルの内容

それでは、いよいよ式（１５）$_1$～（１５）$_3$の各式の内容を求めていきましょう。

（1）マトリックス［Ｐ］の場合

式（１５）$_1$の各要素ごとの積分$[p_{ij}]^e$を求めます。

$$\left[p_{ij}\right]^e = \int_{V^e} N_i N_j dx \cdot dy = \int_{V^e} L_i L_j dx \cdot dy \quad (\text{✈三角形１次要素の場合}) \tag{27}$$

いまL_iは縦ベクトルを、L_jは横ベクトルを表していますので式(２７)は次式のように展開できます。

$$= \int_{V^e} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \left(L_1 L_2 L_3\right) dx \cdot dy = \int_{V^e} \begin{pmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ & L_2^2 & L_2 L_3 \\ \text{対称} & & L_3^2 \end{pmatrix} dx \cdot dy \tag{28}$$

ここで、たとえば$\int_{V^e} L_1^2 dx\cdot dy$の積分値は式（２６）の積分公式からつぎのように求められます。

$$\int_{V^e} L_1^2 dx\cdot dy=\frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!}\cdot 2\mathit{\Delta}=\frac{\mathit{\Delta}}{6}$$

他の項についても同様に積分値を求めることができ、結局次式の結果を得ます。

$$\left[p_{ij}\right]^e=\mathit{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ & \frac{1}{6} & \frac{1}{12}\\ \text{対称} & & \frac{1}{6}\end{pmatrix} \qquad (２９)$$

（2）ベクトル｛F｝の場合

たとえば式（１５）$_3$ の右辺第１項における次の要素積分を考えましょう。

$$\left[f_i\right]^e=-\int_{V^e} N_i Q dx\cdot dy=-Q_e\int_{V^e} L_i dx\cdot dy \;(\text{✈三角形１次要素}) \qquad (３０)$$

ここでＱｅ は、各要素ごとで一定の値をとるＱを意味しています。
式（３０）でのＬｉ は縦ベクトルを示していますので、結局、式（３０）は次式のように表されます。

$$\left\{f_i\right\}^e=-Q_e\int_{V^e}\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{pmatrix}dx\cdot dy \qquad (３１)$$

ここで、たとえば $\int_{V^e} L_1 dx\cdot dy$ の積分値は式（２６）の積分公式から次式を得ます。

$$\int_{V^e} L_1 dx\cdot dy=\frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!}\cdot 2\mathit{\Delta}=\frac{\mathit{\Delta}}{3}$$

他の項についても同様の積分ができますので、結局、次の結果を得ます。

$$\left\{ f_i \right\}^e = -Q_e \cdot \frac{\Delta}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{３２}$$

以 上

● 学習のチェック

問題１　重み付き残差法とガレルキン法との関係を簡単に述べてください。

問題２　式（２２）$_2$を証明してください。

問題３　三角形１次要素の場合、式（１５）$_2$の右辺第１項において次式が成立することを証明してください。

$$\left\{ d_{ij} \right\}_1^e = \int_{V^e} \left\{ \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right\} dx \cdot dy$$

$$= \frac{k_x}{4\Delta} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ \text{対称} & & b_3^2 \end{pmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ \text{対称} & & c_3^2 \end{pmatrix}$$

以 上