● 非定常二次元熱伝導問題の解析

本章では、前節での基本的な定式化の復習を兼ねて二次元非定常問題の熱伝導方程式についての、より理論的な定式化を説明いたします。

まず次の基礎方程式を考えてみましょう。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{y}}\right)+Q \qquad (1)$$

境界条件としては次の２種類を想定します。

境界Ａで　$\theta = \theta_F$　（固定値）　（２）$_1$

境界Ｂで　$k_x \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{x}}\lambda_x + k_y \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{y}}\lambda_y + q + \alpha(\theta - \theta_{\mathrm{B}}) = 0$　（２）$_2$

ここでＡとＢは計算対象の境界を表しており、αは熱伝達係数、θ_Bは計算対象まわりの流体の温度，Ｑは熱の発生項です。またλ_xとλ_yは境界上での、単位外向き法線ベクトルのｘ，ｙ成分を示しています。なお式（２）$_1$は、式（２）$_2$で熱伝導係数k_x，k_yと熱流束ｑをゼロとして考えた場合に相当しますので、結局、式（２）$_2$を一般的な境界条件式として考えればよいことになります。

１．重み付き残差法による定式化

いま、一要素（面積）領域V^eの任意の点での温度θが次式で表せるとします。

$$\theta = \sum_{1}^{n_e} N_i(x,y)\cdot\theta_i(t) \qquad (3)$$

ここでN_i（ｘ，ｙ）は形状関数または補間関数であり、n_eはその一面積領域内での節点の個数です。まず、式(３)を式(１)に代入して、式(１)の重み付き残差方程式を考えますと次式を得ます。

$$\int_R N_i\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\sum_{1}^{n_e}N_j\theta_j + Q - \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\sum_{1}^{n_e}N_j\theta_j\right\}dx\cdot dy = 0 \qquad (4)$$

ここでＲはｘ－ｙ領域内の単一閉曲線によって囲まれた領域です。なおこの際ガレルキン法を採用していますので、式（４）では重み関数を形状関数としています。ここで以下の変形の都合上、式（４）左辺の第１項をⒶ、第２項をⒷとおきます。

１．１ 積の微分による変形

いま、次のような積の微分による変形式を考えます。

$$\int_R \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(N_i \sum_1^{n_e} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x}\theta_j \right)}_{U} dx\cdot dy$$

$$= \int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x}\theta_j\right) dx\cdot dy + \underbrace{\int_R N_i \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_1^{n_e} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x}\theta_j\right) dx\cdot dy}_{Ⓐ} \qquad (5)$$

いま式（５）左辺中のカッコ内をＵとおくと、結局Ⓐは次式で表されます。

$$Ⓐ = \int_R \frac{\partial U}{\partial x} dx\cdot dy - \int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_x \frac{\partial N_j}{\partial x}\theta_j\right) dx\cdot dy \qquad (6)_1$$

同様にして次式を得ます。

$$Ⓑ = \int_R \frac{\partial V}{\partial y} dx\cdot dy - \int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y}\theta_j\right) dx\cdot dy \qquad (6)_2$$

ただし、

$$V = N_i \sum_1^{n_e} k_y \frac{\partial N_j}{\partial y}\theta_j \qquad (7)$$

です。

１．２ ガウスの公式の適用

いまＳをＲの境界としλｘとλｙをＳ上の各点での単位外向き法線ベクトルのｘ，ｙ成分としますと、（Ｒ＋Ｓ）上で連続な偏導関数をもつ関数Ｕ（ｘ，ｙ）、Ｖ（ｘ，ｙ）に関して次式が成り立ちます。

$$\int_R \left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\cdot dy=\int_S \left(U\cdot\lambda_x+V\cdot\lambda_y\right)ds \qquad (8)$$

したがって式（６）$_1$～（６）$_2$から、式（８）を利用して変形すると次式を得ます。

$$Ⓐ + Ⓑ = \int_S \left(U\cdot\lambda_x+V\cdot\lambda_y\right)ds-\int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_x\frac{\partial N_j}{\partial x}\theta_j\right)dx\cdot dy$$
$$-\int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_y\frac{\partial N_j}{\partial y}\theta_j\right)dx\cdot dy \qquad (9)$$

１．３　境界条件式についての重み付き残差方程式

式（１）と同様に今度は式（２）$_2$についての重み付き残差方程式を考え、式（３）を代入すると次式を得ます。

$$\int_S N_i\left[k_x\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_1^{n_e}N_j\theta_j\right)\right\}\lambda_x+k_y\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_1^{n_e}N_j\theta_j\right)\right\}\lambda_y\right.$$
$$\left.+q+\alpha\left(\sum_1^{n_e}N_j\theta_j-\theta_B\right)\right]ds=0 \qquad (10)$$

すなわちＵ、Ｖの定義から次式を得ます。

$$\int_S \left(U\cdot\lambda_x+V\cdot\lambda_y\right)ds+\int_S N_i\alpha\left(\sum_1^{n_e}N_j\theta_j\right)ds+\int_S N_i\left(q-\alpha\theta_B\right)ds=0 \qquad (11)$$

したがって、式（９）の右辺第１項を式（１１）の関係式により変形すると次式を得ます。

$$Ⓐ + Ⓑ -\int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_x\frac{\partial N_j}{\partial x}\theta_j\right)dx\cdot dy-\int_R \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\left(\sum_1^{n_e} k_y\frac{\partial N_j}{\partial y}\theta_j\right)dx\cdot dy \qquad (12)$$

いっぽう、式（４）より次式の関係があります。

$$Ⓐ + Ⓑ +\int_R N_i\left(Q-\frac{\partial}{\partial t}\sum_1^{n_e}N_j\theta_j\right)dx\cdot dy=0 \qquad (13)$$